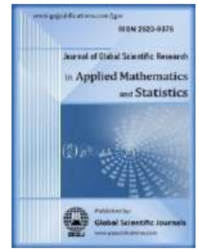
Contents lists available at www.gsjpublications.com

Journal of Global Scientific Research
in Applied Mathematics and Statistics

journal homepage: www.gsjpublications.com/jourgsr



Solve Some Ordinary Differential Equations Using Wavelet Algorithms

Esraa Mohammed Basher Yahea[1,2]

[1]*Master of Computational Mathematics, College of Computer Science and Mathematics, University of Mosul, Mosul, Iraq.*
[2]*Assistant Chief Programmer, Educational Planning Department, Nineveh Education Directorate, Nineveh Governorate, Mosul, Iraq.*

A R T I C L E I N F O

Received: 19 Jul 2023,
Revised: 21 Jul 2023,
Accepted: 30 Jul 2023,
Online: 31 Aug 2023

Keywords:
Wavelets, multi-precision analysis, size function, size function coefficients, differential equations, wavelet algorithm, wavelet hare

A B S T R A C T

Wavelets are an essential tool in solving and addressing many issues in a number of disciplines such as computer science, physics, medicine, engineering and other fields of science. Blood analysis, contacts, and more. Wavelets had applications in mathematics, especially in differential equations. Wavelet functions were used as important tools for solving large numbers of problems whose solution cannot be expressed in analytical terms, either because of the complex form that is studied according to it or because of its difficulty(1).

Corresponding author:
E-mail address: esraa_math@nan.epedu.gov.iq
doi: 10.5281/jgsr.2023.8289315

حل بعض المعادلات التفاضلية الاعتيادية باستخدام خوارزميات المويجات

إسراء محمد بشير يحيى

ماجستير رياضيات حاسوبية، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل، الموصل، العراق.

معاون رئيس مبرمجين، قسم التخطيط التربوي، مديرية تربية نينوى، محافظة نينوى، العراق.

الملخص:

تعد المويجات أداة اساسية في حل ومعالجة العديد من المسائل في عدد من التخصصات مثل علوم الحاسوب، الفيزياء، الطب، الهندسة وغيرها من مجالات العلوم، تُعد المويجات تطوراً جديداً في مجال الرياضيات التطبيقية حيث يظهر اهم تطبيقات في المجالات التي تتطلب معالجة الاشارة مثل الصوتيات وعلم الفلك وتحليل الدم والاتصالات وغيرها.وقد كان للمويجات تطبيقات في الرياضيات وخصوصا في المعادلات التفاضلية فقد استخدمت توابع المويجات كأدوات مهمة لحل اعداد كبيرة من المسائل التي لا يمكن التعبير عن الحل لها بعبارات تحليلية، اما بسبب الشكل المعقد الذي يتم الدراسة وفقه او لصعوبتها.

الكلمات المفتاحية: المويجات، التحليل المتعدد الدقه، تابع المقاس، معاملات تابع المقاس، المعادلات التفاضلية، خوارزمية المويجة ، مويجة هآر.

المقدمة:

في هذا البحث قمنا بدراسة لتوابع المويجات وبعض أنواعها، بالاضافة الى التحليل المتعدد الدقة، وبعض الخوارزميات المهمة عن المويجات، واستخدمت طريقة مويجات هار في حل المعادلات التفاضلية الخطية وقد تم مقارنة النتائج التي حصلنا عليها من هذه الطريقة مع الطرق التقليدية المعروفة، حيث تبين ان الطريقة الجديدة ابسط وتعطي نتائج مقاربة او افضل من الطرق التقليدية وذلك حسب المعادلة التفاضلية المعطاة.

❖ المويجات

التحويل المويجي (Wavelet Transform) او تحليل المويجات (Wavelet Analysis) وهوعبارة عن طريقة تحليلية رياضية تستخدم من أجل معالجة الإشارات للعديد من التطبيقات العملية وان اساس هذه النظرية مبني على نظرية العالم جوزيف فوريرفي عام 1822 (Fourier Transform) وهي طريقة تستخدم لتمثيل الاشارات الدورية على شكل متسلسلة (او تابع تذبذبي)من الجيب والجيب تمام ، حيث ان المويجة تمثل مويجة صغيرة اي تابع يمثل ذبذبة واحدة. (2) (4)

❖ **التحويل المويجي (Wavelet Transform) او تحليل المويجات (Wavelet Analysis)** هو عبارة عن طريقة تحليلية رياضية تستخدم من أجل معالجة الإشارات للعديد من التطبيقات العملية وان اساس هذه النظرية مبني على نظرية العالم جوزيف فورير في عام 1822 (Fourier Transform)وهي طريقة تستخدم لتمثيل الاشارات الدورية على شكل متسلسلة من الجيب والجيب تمام ويقوم هذا التحويل بنقل الاشارة من مجال الزمن الى مجال التردد وبالعكس .ولكن المشكلة الرئيسية هو ان تحويل فورير يصبح غير فعال للاشارات متغيرة التردد او غير الثابتة لأنه لا يزودنا بمعلومات عن المحتوى الترددي خلال الزمن, كذلك بسبب ضياع بعض الخواص المهمة لهذه الاشارات مثل الاتجاه والانحراف وغيرها, لهذا السبب تم تطوير ما يعرف بتحويل فورير القصير زمنيا. (Short Time Fourier Transform)حيث يقوم هذا التحويل بتمثيل الاشارة بأستخدام نافذة معينة على حساب دقتها الزمنية والترددية زمنيا وترددياً. ولكن المشكلة الرئيسية في هذا التحويل هو الضائعات الحاصلة في الزمن والتردد, حيث يتم الحصول على دقة عالية من اجل الاشارات التي تتغير بسرعة عند استخدام نافذة صغيرة, ولكن هذه الدقة لا تكون عالية للاشارات التي تتغير ببطء, وعند استخدام نافذة كبيرة يحصل العكس تماما, لهذا السبب تم تطوير ما يعرف بنظرية تحويل المويجات. بأستخدام هذا التحويل, تم حل المشكلات السابقة عن طريق استخدام نافذة متغيرة العرض بدلا من نافذة ثابتة العرض, للحصول على معلومات مختلفة التردد على طول الموجة يتم تغيير عرض النافذة, بهذه الطريقة يتم الحصول على ما يعرف بالمويجات التي يختلف ترددها بأختلاف عرض النافذة المستخدم.

تقوم النافذة الكبيرة بأنتاج مويجة ممددة تتضمن العناصر ذات التردد المنخفض و التي تعرف أيضا بالعوامل التقريبية (Approximation) بينما تقوم النافذة الصغيرة بأنتاج مويجة مضغوطة تتضمن العناصر ذات التردد المرتفع والتي تعرف أيضا بالعوامل التفصيلية (Details). للحصول على

المعلومات الموصفة للإشارة, يتم تحليل الاشارة اي تقسيمها إلى العوامل التقريبية والتفصيلية وتستمر هذه العملية لحين الحصول على مجموعات متتابعة من العوامل التي تم تعريفها مسبقاً. في كل مرحلة تحليل تنتج اشارات ذات مجال ترددي مساوٍ لنصف المجال الترددي للإشارة الأصلية, وهذه العملية تساعد في الحصول على المزيد من تفاصيل الإشارة في كل مرحلة تحليل. يتم الحصول على الاشارة الاصلية او اعادة التركيب بالتجميع المتسلسل لكل العوامل الناتجة سابقاً (العوامل التقريبية والعوامل التفصيلية) بدءاً من آخر مرحلة تحليل. تستخدم نظرية التحويل المويجي في العديد من المجالات مثل التشفير, الرادار, الفلك, السمعيات, البصريات, حل المعادلات التفاضلية, انظمة التحليل الرقمي, معالجة و ضغظ وازالة الضجيج من الاشارة والصورة, كشف الترددات, الهندسة النووية, التعرف على الاصوات, التنبؤ المبكر عن الزلازل وغيرها

❖ اهمية دراسة المويجات:

إنّ السبب في رواج المويجات هو تنوعها حيث أنّ هناك العديد من المويجات التي نستطيع أن نختار منها ما يناسب مسألتنا المعالجة، والتي تعطي تنوعاً في حلول المسائل مما يترك الباب مفتوحاً أمام الباحثين لإيجاد مويجات جديدة تُعطي نتائج أفضل من المويجات الحالية. وتُعدّ نظرية المويجات من الناحية الرياضية نظرية مكتملة تقريباً، ولكن الأبحاث الحالية تدور حول تطوير تطبيقاتها، وايجاد مويجات جديدة أكثر ملائمة للمسائل المطروحة في الوقت الراهن.

❖ نشوء المويجات

- قام العالم هارّ HAAR عام 1910 بتعريف قاعدة جديدة ومتعامدة لتمثيل التوابع، حيث تعتبر أبسط الامثلة على المويجات والتي تتميز بان لها دعامة متراصة ولكنها ليست مستمرة.

- استخدم العالم الفرنسي Jean Morlet عام 1975 المويجات لوصف بعض التوابع، حيث استخدم عبارة المويجات ذات الميل الثابت "wavelet of constant slope" (3)

- عرف Morletو Grossmann عام 1981 المويجات ضمن سياق الكم، حيث اضافة طريقة تفكير جديدة لفهم المويجات باستخدام الفيزياء. وقد قام ايضا بتعريف تحويل المويجات وتحويل المويجات العكسي للاشارات.

- البريطاني Maar أعطى في اوائل الثمانينات مثالا للمويجات من خلال عمله في مختبر الاستخبارات الاصطناعي MIT في مجال الرؤية الاصطناعية للرجال الاليين، وكذلك عرف مويجة جديدة قادرة على حل مسألته هذه والتي تُدعى باسم مويجة Maar.

- الفرنسي Stephane Mallat عام 1986 عمل قفزة هامة للمويجات من خلال عمله في معالجة الإشارت الرقمية حيث عرّف التحليل المتعدد الدّقة، والذي يعتبر قاعدة لوصف بناء قواعد المويجات المختلفة، وأوجد أيضاً علاقات تكرارية لحساب تحويل المويجات بما يعرف بتحويل المويجات السريع (5).

- قام الفرنسي Meyer بعمل نتائج Mallat وهو اول من بنى مويجات مستمرة وقابلة للاشتقاق ولكنها لم تكن ذات دعامة متراصة.
- قام Wicker houser و Meyer وKaufman عام 1996 بإنجاز خطوة اضافية مهمة في نظرية المويجات بتعريف حزم المويجات. (5)

- استعملت العالمة الرياضية والفيزيائية البلجيكية دوبتشيز Daubechies عام 1988 ابحاث العالم Mallat لبناء مويجات ذات دعامة متراصة والتي اصبحت حجر الزاوية لتطبيقات المويجات في الوقت الحالي.(7) (8) (6)

❖ نظرة عامة على الطرق العددية للمعادلات التفاضلية

ترتبط المعادلة التفاضلية بدالة غير معروفة بمشتقاتها في التطبيقات وعادةً ما تمثل الوظائف الكميات الفيزيائية والمشتقات تمثل معدلات التغيير الخاصة بهم. تلعب المعادلات التفاضلية دور مهم في نمذجة المشاكل الفيزيائية في العلوم والهندسة والاقتصاد، يمكن وصف المعادلات التفاضلية كمعادلات من الظواهر الطبيعية مثل الصوت والحرارة والكهرباء الساكنة والديناميكا الكهربائية وتدفق السوائل، المرونة وميكانيكية الكم. هذه تبدو جسدية متميزة يمكن إضفاء الطابع الرسمي على الظواهر بالمثل من حيث PDEs. بينما يمكن استخدام الطرق التحليلية لحل بعض المعادلات التفاضلية ، لا يمكن حل العديد من المعادلات التفاضلية إن لم يكن معظمها يمكن تحليلها تؤخذ الطرق العددية للمعادلات التفاضلية في الاعتبار عندما يكون المعادلات التفاضلية عادية أو جزئية ولا يمكن حلها مباشرة عن طريق طرق تحليلية.

❖ الفضاء المنظّم (9)

هو فضاء متجهي مزوّد بنظيم، والنظيم على فضاء متجهي (حقيقي أو عقدي)

وهو دالة حقيقية على x من X بالشكل | x | (ويقرأ " نظيم x ") بحيث تتحقق الخواص التالية:

1- $| x || \geq 0$
2- $||\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$
3- $||\alpha\, x || = |\alpha|.||x|$
4- $||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq | x || + |\mathbf{y}|$ (متراجحة المثلث)

ويمثل x و y هنا متجهين كيفيين في ، أما α فتمثل عدداً ما.

❖ تقارب متتالية في فضاء منظّم (9)

تكون المتتالية $(x\ n)_{n \geq 1}$ في فضاء منظم X متقارب إذا وجد عنصر x في X بحيث أن :

$$\lim_{n\to\infty} = ||x - x\ n\ \ || = 0.$$

ونكتب عندئذ $x\ n \ \to x$ كما ان x تمثل نهاية المتتالية x n.

❖ المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة (9)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء منظّم X إنّها مفتوحة إذا حوت كرة حول كل نقطة فيها، ونقول عن مجموعة جزئية K من X إنّها مغلقة إذا كانت متممتها في X مفتوحة أي إذا كانت المجموعة $k^c = x - k$ مفتوحة.

❖ المجموعة الكثيفة (9)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء منظّم X إنّها كثيفة في X إذا كان $X . \overline{M}$.

❖ المجموعة المحدودة (9)

نقول عن مجموعة جزئية M من فضاء منظّم X إنّها محدودة إذا وجد عدد موجب r بحيث تتحقق المتراجحة $||X|| \leq r$ أيّاً كان x من M.

❖ مصفوفة العمليات لتوابع نبض الكتلة :

Operational Matrix For Block Pulse Functions

تم دراسة المجموعة المتعامدة لتوابع نبض الكتلة (BPFS) وتطبيقها في تحليل النظم ونظرية التحكم (السيطرة)، وذلك من قبل (1969) Harmuth ثم استخدمت هذه التوابع في عدّة مواضيع رياضية كحل المعادلات التفاضلية من قبل Chen et al ، وقد كان لهذه الطريقة اهمية كبيرة لدورها في تسهيل وتبسيط الحسابات في الخوارزميات المُتعلقة بها.

يمكن نشر التابع القابل للمكاملة u (x) والمعرّف على نصف المجال المفتوح (0,1] في متسلسلة (BPFS)

$$u\,(x) = c_0 b_0(x) + c_1 b_1(x) + c_2 b_2(x) + \cdots \qquad (1)$$

حيث ان c0 ,c1,c2 ,......,ck معاملات يمكن تحديده من خلال

$$c_i = m \int_0^1 u(x) b_i(x) dx \qquad (2)$$

وتُعرف مجموعة توابع نبض الكتلة (BPFS) كالآتي(11) (10):

$$b_i(x) = \begin{cases} 1 \; ; & s_1 \leq x \leq s_2 \\ 0 \; ; & \text{elsewhere} \end{cases} \qquad (3)$$

حيث أن

$S_1 = \frac{i}{m}$ $\quad$ $S_2 = \frac{i+1}{m}$ $\quad$ $i = 1,2,3, \dots \dots, k$

m عدد صحيح بحيث أن $m \geq 2$.

واذا كانت u ثابتاً على كل مجال جزئي، عندئذ يمكن أن يُكتب وفق الصيغة التالية:

$$u\,(x) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i b_i(x) \qquad (4)$$

و يمكن أن يكتب أيضاً بشكل منفصل كما يلي:

$$u\,(x) = C_m^T B_m(x) \qquad (5)$$

حيث ان $C_m^T = [c_0 \quad c_1 \quad c_3 \quad \ldots \quad c_{m-1}]$ متجه المعاملات

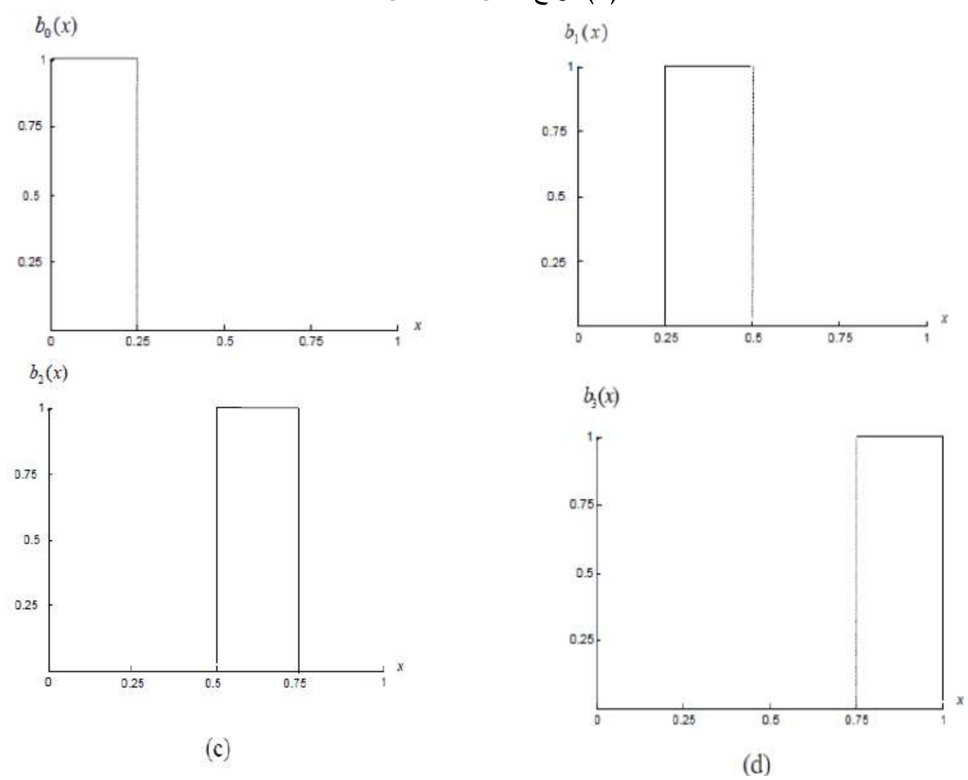
و

$$B_m(x) = [b_0(x) \quad b_1(x) \quad b_2(x) \qquad b_{m-1}(x)]^T$$

متجه تابع نبض الكتلة.

وتوضّح الأشكال من (a) الى (d) من الشكل (1) توابع نبض الكتلة من أجل $m = 4$.

الشّكل :(1) توابع نبض الكتلة من أجل $m = 4$



ويمكن كتابة مصفوفة لها بالشكل التالي عند عينة النقاط

$x = \frac{n}{8}$, $n = 1,3,5,7$

$$B_4(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

ونحصل بإنجاز التكامل لتوابع نبض الكتلة من المعادلة (3) عند $m = 4$

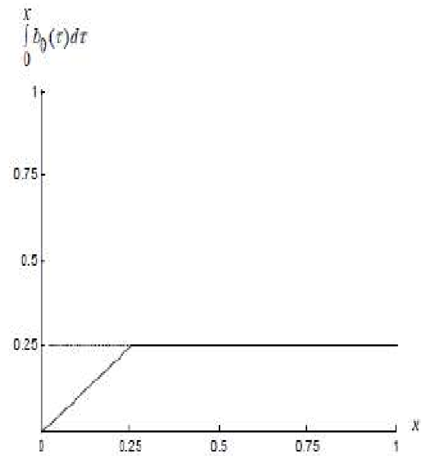
$$\int_0^x b_0(t)dt = x \ ; \quad 0 \le x \le \frac{1}{4} \qquad (7)$$

$$\int_0^x b_1(t)dt = x - \frac{1}{4} \ ; \quad \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \qquad (8)$$

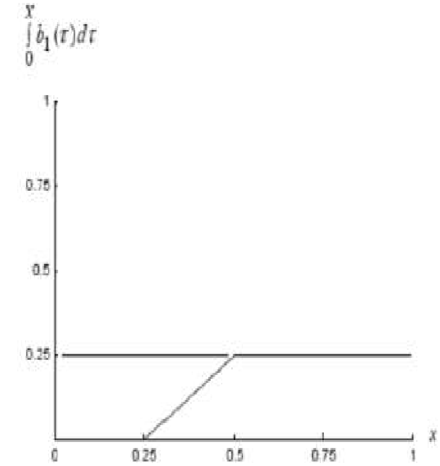
$$\int_0^x b_2(t)dt = x - \frac{1}{2} \ ; \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \qquad (9)$$

$$\int_0^x b_3(t)dt = x - \frac{3}{4} \ ; \quad \frac{3}{4} \le x \le 1 \qquad (10)$$

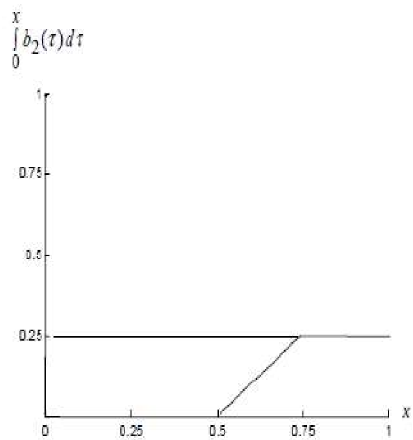
و تُمثّل الأشكال من (a) الى (b) من الشكل (2) تكاملات $B_4(x)$



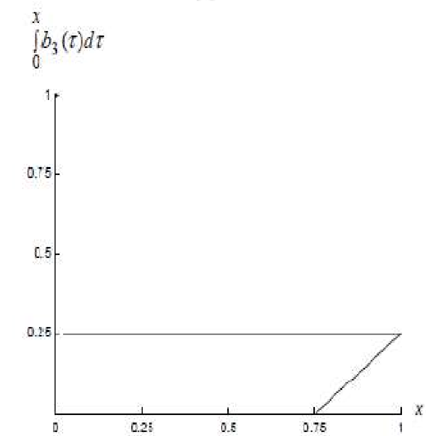
(a)



(b)



(c)



(d)

ويمكن أن يُمثّل التكامل لتابع نبض الكتلة عند $m = 4$

$$\int_0^x B_4(t)dt \approx Q_{B_4}(x)$$

حيث ان Q_{B_4} مصفوفة العمليات لتوابع نبض الكتلة من أجل $m = 4$.

$$B_4(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

ولقد قام (1) بوضع الشكل العام ل Q_{B_m} (15)

$$Q_{B_m} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

وتأتي أهمّية توابع نبض الكتلة من كونها تمتلك ميزات لحل المسائل المتضمنة التكاملات والاشتقاقات، وذلك لوضوحها في التعبير، وبساطتها في الصياغة، ولدورها في اختزال العمليات الحسابية كما أنّها سهلة الاستخدام من أجل اشتقاق مصفوفات العمليات الأخرى وذلك لأنّ مصفوفة تابع نبض الكتلة مصفوفة احادية، ونلاحظ أيضاً أنّ Q_{B_m} مصفوفة مثلثية عليا ذو رتبة مساوية ل m ، وتملك m قيمة ذاتية مساوية ل $\lambda = \frac{1}{2}$.

مصفوفة العمليات لتوابع نبض الكتلة Q_{B_m} مصفوفة قابلة للقلب وينتج من العلاقة:

$$Q_{\emptyset_m} = \emptyset_m . Q_{B_m} . \emptyset_m^{-1}$$

أن مصفوفة العمليات للتوابع المتعامدة $\emptyset_m(x)$ مشابهة لمصوفةِ العمليات لتوابع نبض الكتلة ويمكن بسهولة إثبات أنّ $Q_{\emptyset_m}$ أيضاً قابلة للقلب وذلك لان Q_{B_m} قابلة للقلب.(12)

❖ أمثلة عن المويجات (16)

- مويجة هآر Haar Wavelet.
- مويجة القبعة المكسيكية Mexican Hat Wavelet.
- مويجات دوبتشيز Daubechies Wavelets.
- مويجات مورليت Morlets Wavelets .

❖ مويجة هآر *Haar Wavelet*

وتُعتبر من أسهل الأمثلة على المويجات والتي قام بتعريفها العالم الهنغاري هآر عام 1910 وهي ذات دعامة متراصة ولكنها غير مستقرة وتتميز توابع مويجة هآر بانها سلسلة من التوابع المتعامدة المنظمة والتي تتضمن توابع ثابتة قطعيا.

ويكون الشكل الاساسي لمويجة هآر يعبر عنها بالمعادلة التالية:

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{m}}\begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (14)$$

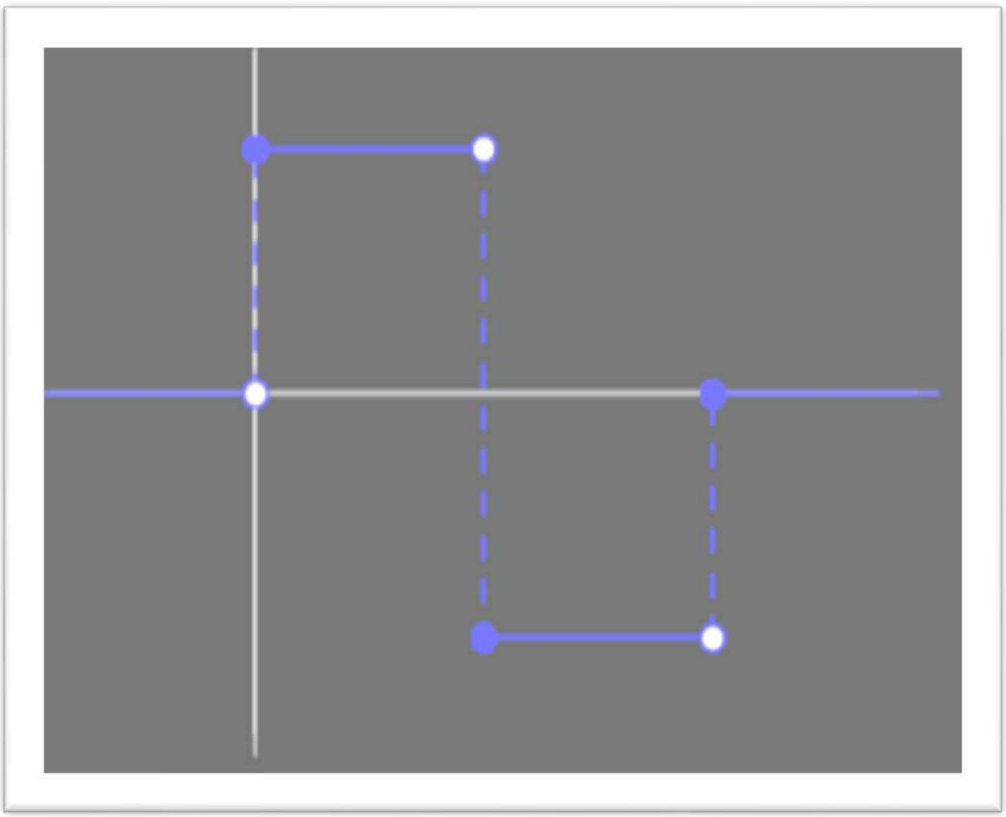
والتي تُعرف بمويجة هآر الأب.

وتعرّف بالعلاقة:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & if \quad 0 \le x \le 0.5 \\ -1 & if \quad 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & , \quad otherwise \end{cases} \qquad (15)$$

بمويجة هآر الأم.

والموضحة بالشكل (1) المخطط البياني لمويجة هآر.



وسوف تُولّد كل التوابع التالية من $h_1(x)$، وذلك باستخدام عمليتي الازاحة او لضغط، وكمثال على ذاك فقد رسمنا الشكل (c) من الشكل (3) بضغط $h_1(x)$ لليسار نصف الفترة الاصلية، والشكل (d) من الشكل (3) هو نفسه (c) مع الازاحة من اليمين بمقدار 0.5.

وقد قام العالم بكتابة أسرة توابع مويجة هآر كما يلي(13)

$$h_i(x) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{cases} 2^{\frac{a}{2}} & \frac{k}{2^a} \le x < \frac{k+0.5}{2^a} \\ -2^{\frac{a}{2}} & \frac{k+0.5}{2^a} \le x < \frac{k+1}{2^a} \\ 0 & otherwise \quad in\ [0,1] \end{cases} \qquad (16)$$

حيث ان k ,.......,i=1, 2 و m−1 رقم دليل السلسلة والدقة $m = 2^J$ وهو عدد صحيح موجب.

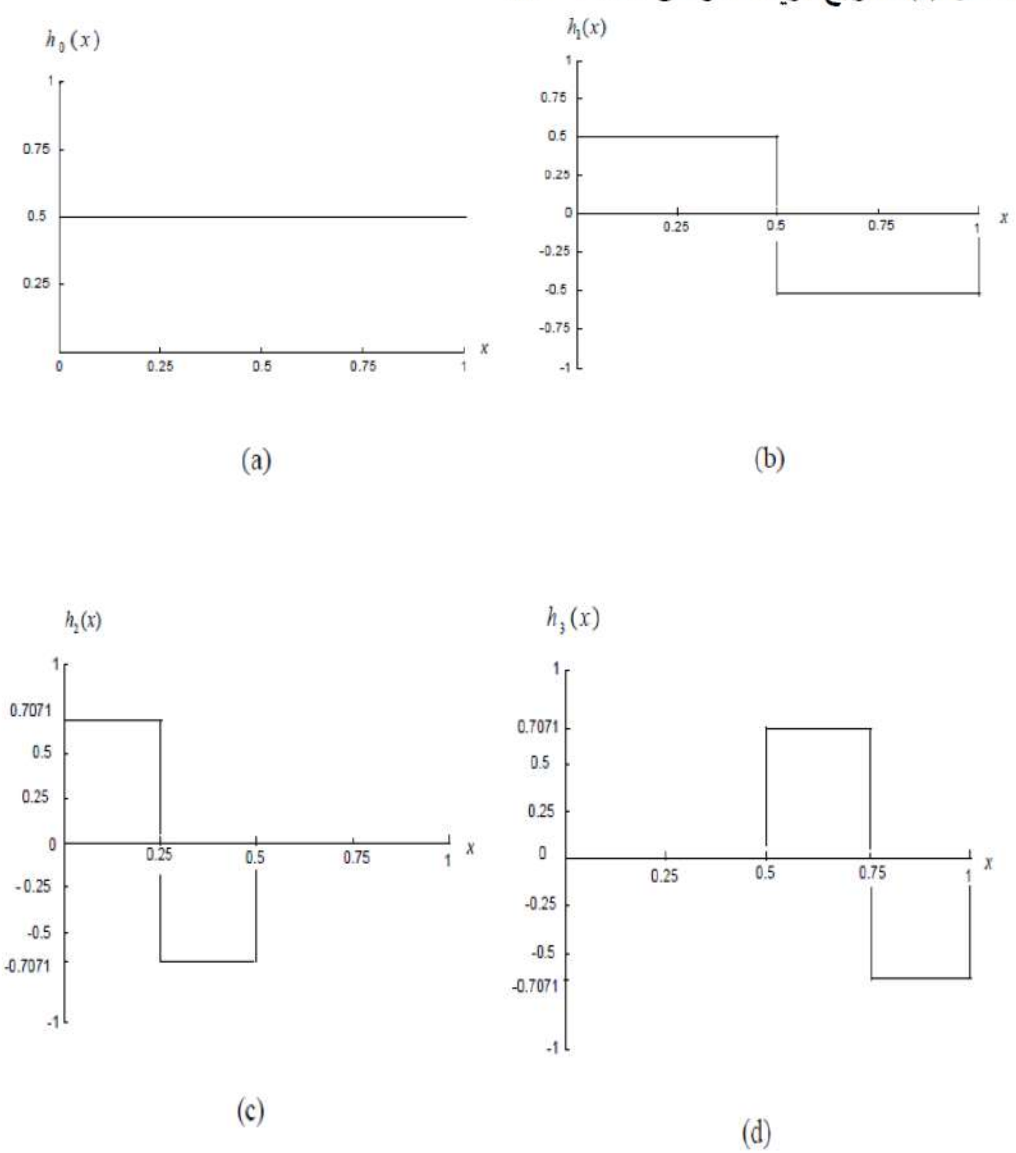
تمثل a, k [integer decomposition] للدليل i، بمعنى اخر $i = 2^a + k$

$a = 1, 2, \ldots\ldots, k, j-1$

$k = 0,1,2, \ldots\ldots\ldots, 2^a - 1$

وتوضح الأشكال من (a) الى (d) من الشكل من الشكل (3) توابع مويجة هار لِ $m = 4$.

الشّكل (3) : توابع مويجة هآر من أجل $m = 4$.



من اجل $i = 2^a + k$ يجب تحقيق العلاقة التالية:

$$\int_0^1 h_i(x)h_j(x)dx = \begin{cases} \frac{1}{m} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (17)$$

من هذه العلاقة نجد ان توابع مويجة هار متعامدة فيما بينها وبالتالي سوف تشكل قاعدة متعامدة.

ويمكن نشر التابع $u(x)$ القابلة للتكامل تربيعيا على المجال $[0,1)$.

الى سلسلة هار بعدد غير منتهي من الحدود:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i h_i(x) \quad (18)$$

وتكتب بالشكل

$$u(x) = c_0(x)h_0(x) + c_1(x)h_1(x) + c_2(x)h_2(x) + \cdots \quad (19)$$

حيث ان c_i معاملات هار والتي تعطى وفق الصيغة التالية:

$$c_i = m\int_0^1 u(x)\, h_i(x)dx \quad (20)$$

وهذه المعاملات مُحددة بحيث يكون تكامل مربع الخطأ (ε) اصغر ما يمكن.

$$\varepsilon = \int_0^1 \left[u(x) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i h_i(x)\right]^2 dx\,; \quad m = 2^j \qquad j \in \{0\} \cup N \quad (21)$$

حيث ان ل $u(x)$ عدد غير منتهي من الحدود، فذا كان $u(x)$ ثابتا قطعياً او يقرب من الثابت القطعي في كل مجال جزئي عند ذلك نحصل على $u(x)$ ذو حدود منتهيه، ويمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$u(x) \approx \sum_{i=0}^{m-1} c_i h_i(x)$$

$$\approx c_m^T H_m(x)\,; \qquad x \in [0,1) \quad (22)$$

حيث ان T تشير الى المنقول.

$$c_m^T = [\, c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \ldots\ldots \quad c_{m-1}$$

متجه معاملات هار

$$H_m(x) = [\, h_0(x) \quad h_1(x) \quad h_2(x) \quad h_{m-1}(x) \,]^T$$

وباخذ عينة النقاط الآتية:

$$x = \frac{n}{8} \quad ; \quad n = 1,3,5,7 \qquad k = 1,2,\ldots\ldots,m$$

يمكن ان نكتب اول اربعة متجهات عند هذه النقاط بالصيغة المصفوفية الآتية:

$$H_m\left(\frac{1}{8}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}^T$$

$$H_m\left(\frac{3}{8}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}^T$$

$$H_m\left(\frac{5}{8}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$$

$$H_m\left(\frac{7}{8}\right) = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}^T$$

وبالتالي نحصل على:

$$H_4 = \left[H_m\left(\frac{1}{8}\right), H_m\left(\frac{3}{8}\right), H_m\left(\frac{5}{8}\right), H_m\left(\frac{7}{8}\right)\right]$$

$$H_4 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \qquad (23)$$

وبشكل عام من اجل $m = 2^J$ ان المصفوفة H_m الاتية مصفوفة متعامدة:

$$H_m = \left[H_m\left(\frac{1}{2m}\right) \quad H_m\left(\frac{3}{2m}\right) \quad \dots\dots\dots\dots \quad H_m\left(\frac{2m-1}{2m}\right)\right] \qquad (24)$$

حيث ان :

$$(H_m)_{ij} = h_i(x_j)$$

المصفوفة H هي منقول H_m و I_m مصفوفة واحدية اي ان :

$$H_m^T = H_m^{-1}$$

وهذا يجعل من مصفوفة العمليات اكثر مرونة، وذلك لان عملية حساب المنقول ابسط من عملية حساب المقلوب.

من اجل اثبات ان مصفوفة ها متعامدة (24) علينا اثبات ان:

$$(H_m . H_m^T) = \delta_{ij} \qquad (25)$$

حيث ان δ_{ij} ثابت كرونكر .

وبكتابة المعادلة (25) بالشكل التالي

$$(H_m.H_m^T)=\sum_{r=1}^{m}(H_m)_{ir}(H_m^T)_{rj}$$

$$=\sum_{r=1}^{m}(H_m)_{ir}(H_m)_{jr}$$

$$\sum_{r=1}^{m}h_i(x_r)h_j(x_r)$$

تحقق المصفوفة H_m في المعادلة (24) الخصائص التالية:

$$h_i(x_1)h_j(x_1)+h_i(x_2)h_j(x_2)+I\ldots\ldots\ldots+h_i(x_m)h_j(x_m)=0 \qquad ; \qquad i\neq j$$

عدد العناصر الغير صفرية في السطر $i=2^{\alpha}+k$ يساوي الى $\frac{m}{2^{\alpha}}$.

حيث نجد من الخاصية (1) ان $\sum_{r=1}^{m}h_i(x_r)h_j(x_r)=0$ اذا كان $i\neq j$

اما في حالة $i=j$ نجد من المعادلة (16) وباستخدام الخاصية (2) فان :

$$\sum_{r=1}^{m}h_i(x_r)h_j(x_r)=\sum_{r=1}^{m}\frac{2^{\propto}}{m}=\frac{m}{2^{\propto}}.\frac{2^{\propto}}{m}=1$$

نحصل على:

$$\sum_{r=1}^{m}h_i(x_r)h_j(x_r)=\delta_{ij}$$

ويمكن حساب مصفوفة المويجات بسهولة في (20) و (22) باستخدام العلاقة (24) كالاتي:

$$c_m^T=u_mH_m^T \qquad (26)$$

$$u_m\left[u\left(\frac{1}{2m}\right)\ u\left(\frac{3}{2m}\right)\ \ I\ldots..u\left(\frac{2m-1}{2m}\right)\right]$$

❖ خوارزمية مصفوفة العمليات لمويجة هار:

تعتمد هذه الخوارزمية بشكل اساسي على الاستفادة من تكاملات مويجة هار، وذلك لكي نحصل على حل المسالة المطلوبة

ويمكن التعبير عن اول حدود من توابع هار كما يلي:

$$\int_0^x h_0(\tau)d\tau=\frac{1}{2}x \qquad ;\ 0\leq x\leq 1$$

$$\int_0^x h_1(\tau)d\tau=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}x & \frac{1}{2}\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\int_0^x h_2(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x & 0 \le x \le \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}x & \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{eslewhere} \end{cases}$$

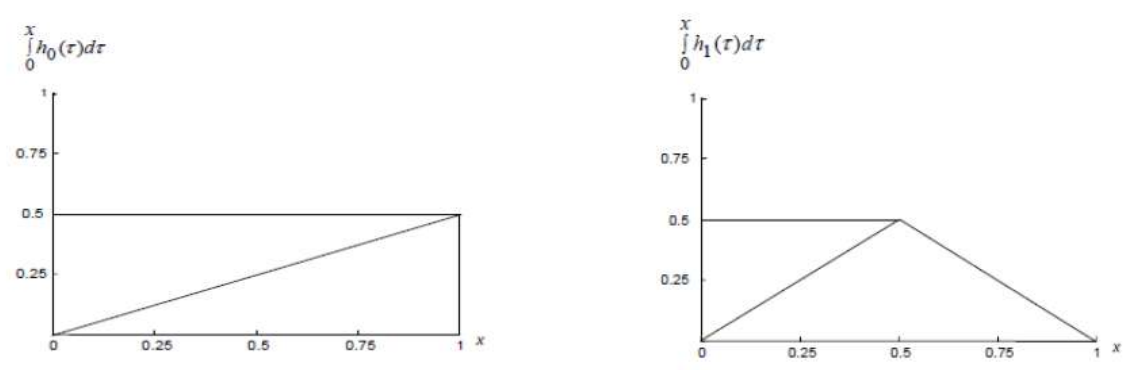
$$\int_0^x h_3(\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}x & \frac{3}{4} \le x \le 1 \\ 0 & \text{eslewhere} \end{cases}$$

بشكل عام يمكن كتابة التكامل (16) من اجل $i = 1,2,\dots\dots k, m-1$ وكما يأتي :

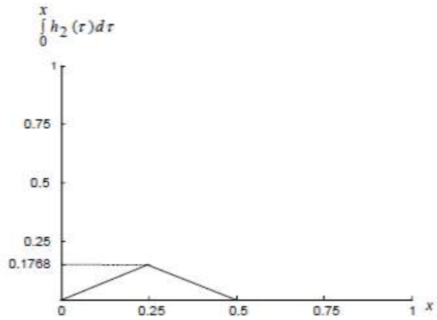
$$\int_0^x h_i(\tau)d\tau = \frac{2^{\frac{a}{2}}}{\sqrt{m}} \begin{cases} x - \frac{k}{2^a} & \frac{k}{2^a} \le x \le \frac{k+0.5}{2^a} \\ \frac{k+1}{2^a} - x & \frac{k+0.5}{2^a} \le x < \frac{k+1}{2^a} \\ 0 & \text{eslewhere} \end{cases} \qquad (27)$$

ويمكن تمثيل من (1) الى (2) من الشكل (4) تكامل H_4.

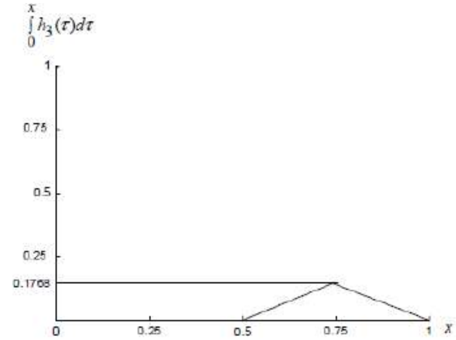
الشكل (4) تكاملات H_m من اجل m=0.



(a) (b)



(c)



(d)

ويكون لدينا عند عينة النقاط $x = \frac{n}{8} \quad ; \quad n = 1,3,5,7$

$$\int_0^x H_4(\tau)d\tau = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

تمثل (28) الصيغة المصفوفية للتكاملات $h_0(\tau)$، $h_1(\tau)$ ، $h_2(\tau)$، $h_3(\tau)$ عند عينة نقاط.

يعطى تكامل توابع مويجة هار من اجل m=4 بالعلاقة التالية:

$$\int_0^x H_4(\tau)d\tau = Q_{H_4} H_4(x)$$

او بشكل عام

$$\int_0^x H_m(\tau)d\tau = Q_{H_m H_m}(x) \quad (29)$$

وبشكل مشابه يمكن ان نُمثل منقول مويجة هار كالاتي:

$$\int_0^x H_m(\tau)d\tau = H_m^T(x) Q_{H_m}^T \quad (30)$$

حيث تدعى المصفوفة Q_{H_m} من البعد $m * m$ مصفوفة العمليات للتكامل H.

وهناك صيغتين ممكن استخدامها لايجاد Q_H . الصيغة الاولى قدمت من قبل كل من Hsiao و Chen [10] كما يات (14)

$$Q_{H_m} = \frac{1}{2^m}\begin{bmatrix} 2mQ_{H_{\frac{m}{2}}} & -H_{\frac{m}{2}} \\ H_{\frac{m}{2}}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

حيث ان (0) يمثل مصفوفة فارغة من الرتبة $\frac{m}{2} * \frac{m}{2}$.

اما الصيغة الثانية فقد قدمت من قبل كما يلي:(13)

$$Q_{H_m} = H_m Q_{B_m} H_m^T \qquad (23)$$

حيث ان Q_{B_m} مصفوفة العمليات لتوابع نبض الكتلة، ونحصل على نفس النتيجة في كلتا الصيغتين.

$$Q_{H_m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8\sqrt{2}} & \frac{-1}{8\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{8\sqrt{2}} & \frac{1}{8\sqrt{2}} \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & \frac{1}{8\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8\sqrt{2}} & \frac{-1}{8\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (33)$$

مثال: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\acute{u}(x) + u(x) = e^x \quad ; \quad 0 \le x < 1 \qquad (34)$$

الشرط الابتدائي:

$$u(0) = 1$$

مع العلم ان الحل الفعلي:

$$u(x) = \cosh(x)$$

نجد بنشر أعلى مشتق يظهر في المعادلة التفاضلية (34) إلى متسلسلة هآر الآتي:

$$\acute{u}(x) = c_m^T H_m(x) \qquad (35)$$

ونجد بعد مكاملة المعادلة (35) :

$$u(x) = \int_0^x c_m^T H_m(x)dx + u(x)$$

$$u(x) = c_m^T Q_{H_m} H_m(x) + \sqrt{m}\ Q_m^T H_m(x) \qquad (36)$$

حيث ان:

$$u(0) = \sqrt{m}\ Q_m^T H_m(x)$$

$$Q_m^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad k \quad 0]$$

وذلك لان الشرط الابتدائي يساوي واحد.

ينتج لدينا بتعويض المعادلتين (35) و (36) في المعادلة (34):

$$c_m^T + c_m^T H_m + \sqrt{m}\ \theta_m^T = k_m^T \tag{37}$$

ثم نقوم بترتيب المعادلة (37) ،وذلك لحساب قيم c_m^T

$$c_m^T\left(I + Q_{H_m}\right) = k_m^T - \sqrt{m}\ \theta_m^T \tag{38}$$

حيث ان :

$$e^x = k_m^T H_m(x)$$

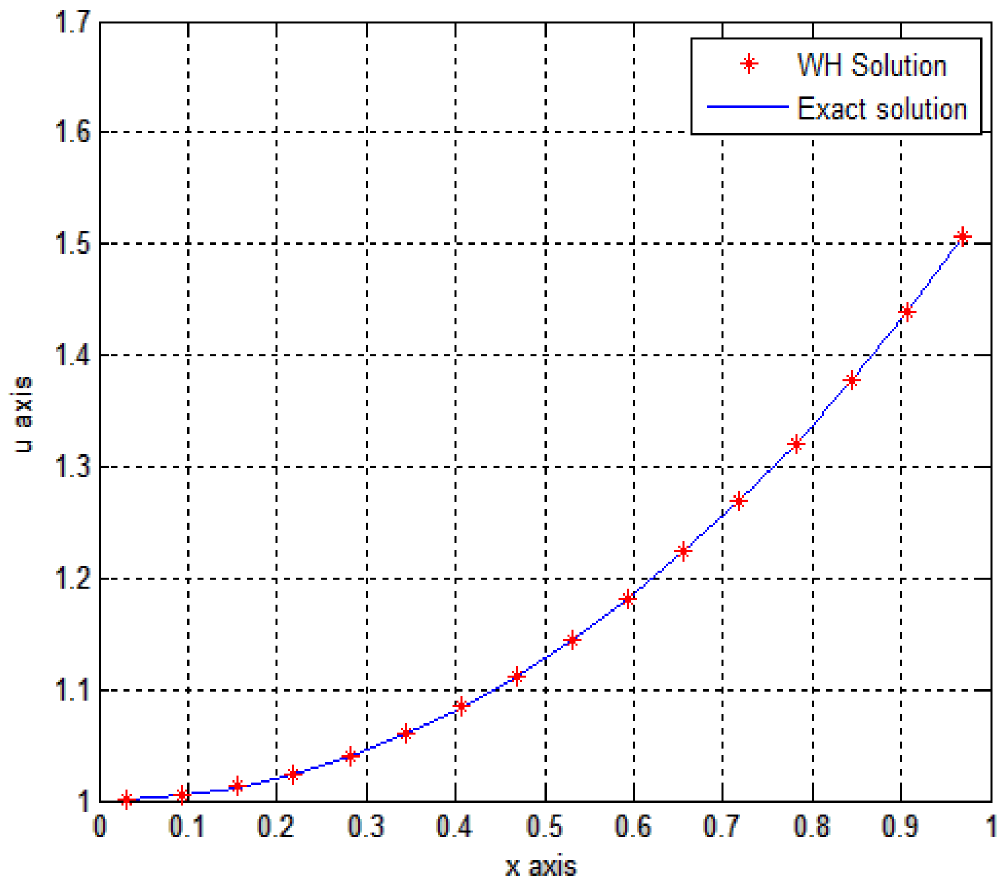
بعد الحصول على معاملات المصفوفة c_m^T يمكننا الحصول على الحل من خلال المعادلة (36).

الجدول التالي يبين مقارنة بين الحل الفعلي والحل باستخدام خوارزمية مصفوفة العمليات لمويجة

هار للمثال السابق عند m=16.

x	Exact solution	Haar solution	Absolute Error
0.0312500000	1.0004883209877233	1.0009619214393668	0.0004736004516435
0.0937500000	1.0043977508439299	1.0048438821947667	0.0004461313508368
0.1562500000	1.0122318867384634	1.0126534525610635	0.0004215658226001
0.2187500000	1.0240213407275780	1.0244210782826839	0.0003997375551059
0.2812500000	1.0398121803589364	1.0401926755532778	0.0003804951943414
0.3437500000	1.0596661086815546	1.0600298101759451	0.0003637014943905
0.4062500000	1.0836607053518053	1.0840099378903070	0.0003492325385017
0.4687500000	1.1118897297776122	1.1122267068045537	0.0003369770269415
0.5312500000	1.1444634874853736	1.1447903231133394	0.0003268356279658
0.5937500000	1.1815092611412039	1.1818279815297366	0.0003187203885326
0.6562500000	1.2231718079107170	1.2234843621123868	0.0003125542016698
0.7187500000	1.2696139251007978	1.2699221954284701	0.0003082703276722
0.7812500000	1.3210170862936161	1.3213228982601870	0.0003058119665709
0.8437500000	1.3775821504585917	1.3778872823381376	0.0003051318795460

الشكل يمثل مقارنة بين الحل الفعلي والحل باستخدام خوارزمية مصفوفة العمليات لمويجة هآر m=16.



References

[1]. Yousef Mustafa, Yousef Ahmed, Bsharat, (2015). “Wavelets Numerical Methods for Solving Differential Equations”.
[2]. Mihir Sen, Samuel Paolucci, Oleg V. Vasilyev, (1995). ”A Multilevel Wavelet Collocation Method for Solving Partial Differential Equations in a Finite Domain”.
[3]. T opiwala, P.N., (2002). “Wavelet Image and Video Compression. Kluwer Academic Publishers”.
[4]. C. Sidney Burrus, Ramesh Gopinath, Haitao, (2015). “GuoWavelets and Wavelet Transforms”.
[5]. M allat, S., (1999). “A Wavelet Tour of Signal processing. SecondEdition, USA, Elsevier”.
[6]. D aubechies, I.,(1992). “Ten Lectures on Wavelets. The Society for Industrial and applied Mathematics”.
[7]. D aubechies, I., (1988). “Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Communication in pure and applied mathematics, 41(7), 906-966”.
[8]. D avaid, F.W., (2002). “An Introduction To Wavelet Analysis. Birkhauser Boston . USA”.
[9]. Khader Hamid Al-Ahmad, (1985), ” Introduction to functional analysis and its applications”.
[10]. S annuti, P. , (1977). “Analysis and synthesis of dynamic systems via block pulse functions. Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, 124 (6), 569-571”.
[11]. R ay, S.S., (2011).” A New Wavelet Operational Method Using Block Pulse And Haar Functions For Numerical Solution Of A Fractional Partial Differential Equation. Journal of Fractional Calculus and Applications, 1(6), 1-12”.
[12]. W u, J.L., Chen, C.H., and Chen, C.F., (2001). “Numerical Inversion of Laplace Transform Using Haar Wavelet Operational Matrices. IEEE Transactions On Circuits And SystemsI: Fundamental Theory And Applications ,48(1) , 120-122”.
[13]. W u, J.L., Li, I.C., (2009).” A Wavelet Operational Method for Solving Fractional Partial Differential Equations Numerically. Dept of Computer Science, National Chung Hsing University”.
[14]. C hen, C.F., and Hsiao, C.H., (1997). “Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems, IEE Proceedings. Control Theory Application, 144(1) , 87-94”.
[15]. A maratunga, K., (1996). “Hierarchical Wavelet-Based Numerical Models for Digital Data . Ph.D. Thesis, Massachusetts Intitute of Technology (MIT),USA”.
[16]. S uji, P., (2012). “Buckling Of Bar By Wavelet -Galerkin Method. Master’s Thesis , National Institute Of Technology Rourkela, India”.
[17]. Jalel, O. H., (2022). Study Solutions of Heterogeneous Wave Equation (ICW) in R3. *Journal of Global Scientific Research*. 7(1), 1983-1989.